DIETER BETTEN

4-DIMENSIONALE TRANSLATIONSEBENEN MIT 8-DIMENSIONALER KOLLINEATIONSGRUPPE

1. EINLEITUNG

Nach ersten Beispielen für nicht-desarguessche 4-dimensionale Translationsebenen [2; 10] wurde in [3] bewiesen, daß jede 4-dimensionale Translationsebene mit mindestens 9-dimensionaler Kollineationsgruppe desarguessch ist. Falls die Kollineationsgruppe Γ einer nicht-desarguesschen 4-dimensionalen Translationsebene 8-dimensional ist, gibt es für die Wirkung der Standgruppe Δ von Γ auf einem eigentlichen Punkt 0 folgende Möglichkeiten:

(a) Δ wirkt reduzibel auf dem R^4 und hält keine Gerade durch 0 fest. In diesem Fall gibt es genau eine einparametrige Schar nicht-desarguesscher Ebenen [3, Satz 5].

(b) Δ wirkt reduzibel auf dem R^4 und hält eine Gerade S durch 0 fest. In der vorliegenden Arbeit wird bewiesen, daß genau eine Einzelebene mit dieser Eigenschaft existiert. Diese Ebene wird von folgender Partition des R^4 in 2-dimensionale Teilräume erzeugt:

$$\mathfrak{B} = \left\{ \begin{pmatrix} t & s \\ -s^3/3 & s^2+t \end{pmatrix};\quad s, t \in R \right\} \cup \{S\}.$$

(c) Die Gruppe Δ wirkt irreduzibel auf dem R^4. Dieser Fall soll an anderer Stelle behandelt werden.

2. HILFSMITTEL

Sei $\mathfrak{B}$ eine Partition des R^4 in 2-dimensionale Teilräume, dann entsteht durch Verschieben von $\mathfrak{B}$ und projektives Abschließen eine Translationsebene $\mathbf{P}(\mathfrak{B})$. Wenn diese Translationsebene eine topologische projektive Ebene – kurz: 4-dimensionale Translationsebene – ist, nennen wir die Partition $\mathfrak{B}$ topologisch. In [3] wurde folgendes Konstruktionsprinzip für topologische Partitionen des R^4 angegeben: Sei $R^4 = \{(x, y, u, v);\ x, y, u, v \in R\}$, dann bezeichnen wir den durch die Gleichungen $u = \alpha x + \beta y$, $v = fx + gy$ definierten 2-dimensionalen Teilraum mit

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ f & g \end{pmatrix}.$$

Geometriae Dedicata **2** (1973) 327–339.

Ferner sei S der durch $x=y=0$ gegebene Teilraum. Sei $\tau : R^2 \to R^2$ ein 'transversaler' Homöomorphismus der reellen Ebene, das ist eine topologische Abbildung mit der Eigenschaft: Für je zwei gewöhnliche parallele Geraden $H \neq K$ gilt $|H \cap K^\tau| = 1$. Wenn τ in Koordinaten gegeben ist als $\tau = ((\alpha, \beta) \mapsto (f(\alpha, \beta), g(\alpha, \beta)))$, dann ist

$$\mathfrak{B}_\tau = \{S\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ f(\alpha, \beta) & g(\alpha, \beta) \end{pmatrix}; \quad \alpha, \beta \in R \right\}$$

eine topologische Partition des R^4, und umgekehrt läßt sich jede topologische Partition des R^4 in 2-dimensionale Teilräume auf diese Weise konstruieren. Die Ebene $\mathbf{P}(\mathfrak{B}_\tau)$ ist genau dann desarguessch, wenn τ linear ist.

Zwei nicht desarguessche 4-dimensionale Translationsebenen $\mathbf{P}(\mathfrak{B}_1)$ und $\mathbf{P}(\mathfrak{B}_2)$ sind genau dann isomorph, wenn die erzeugenden Partitionen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ linear isomorph sind [3, Kor. zu Satz 2]. Die volle Kollineationsgruppe Γ einer nicht desarguesschen 4-dimensionalen Translationsebene $\mathbf{P}(\mathfrak{B})$ läßt die Translationsachse fest und ist das semidirekte Produkt der linearen Gruppe der Partition $\mathfrak{B}$ mit der Translationsgruppe R^4. Um die Linearität der Standgruppe auf einem eigentlichen Punkt benutzen zu können, setzen wir die Ebene immer als nicht desarguessch voraus. Ferner führen wir folgende Bezeichnungen ein: Der eigentliche Punkt sei der Punkt $0 \in R^4$, $\mathfrak{B}$ sei das Büschel der Geraden durch 0, und $\Delta = (\Gamma_0)^1$ sei die Zusammenhangskomponente der Standgruppe von Γ auf dem Punkt 0. Lemma 6 aus [3] besagt folgendes: Sei G eine mindestens 2-dimensionale Kollineationsgruppe einer 4-dimensionalen Translationsebene, und G halte drei Geraden durch einen eigentlichen Punkt fest. Dann ist die Ebene desarguessch. In 4-dimensionalen topologischen projektiven Ebenen gilt folgendes 'Viereckslemma' [12, 4.1]: Läßt eine Kollineation γ aus der Zusammenhangskomponente Γ^1 die Ecken eines Vierecks fest, so ist $\gamma = 1$. Für weitere Begriffe und Hilfsmittel, die ohne Zitat benutzt werden, sei auf die Arbeiten [3; 11; 12; 13] und die dort angegebene Literatur verwiesen.

SATZ 1. *Sei* $\mathbf{P}$ *eine nicht desarguessche* 4-*dimensionale Translationsebene mit* 8-*dimensionaler Kollineationsgruppe* Γ, *und* $\Delta = (\Gamma_0)^1$ *halte eine Gerade* $S \in \mathfrak{B}$ *fest. Dann hat* Δ *eine Untergruppe* $G \cong R^3$ *der folgenden Art: G enthält die positiven Streckungen des* R^4, *der Kern* $G_{[S]}$ *ist eindimensional, und* G *wirkt transitiv auf* $\mathfrak{B} - \{S\}$.

Beweis. (a) Nach [3, Lemma 6] folgt, daß Δ auf $\mathfrak{C} = \mathfrak{B} - \{S\}$ nur 2-dimensionale Bahnen hat, also transitiv wirkt. Die Gruppe $H = \Delta_{[S]}$, welche S elementweise festläßt, ist Normalteiler von Δ, und die H-Bahnen auf $\mathfrak{C}$ sind Imprimitivitätsgebiete für die Wirkung von Δ auf $\mathfrak{C}$. Da Δ transitiv auf $\mathfrak{C}$ wirkt, sind insbesondere die H-Bahnen auf $\mathfrak{C}$ untereinander homöomorph.

(b) Die Gruppe $H = \Delta_{[S]}$ ist eindimensional.

Angenommen, es wäre $\dim H \geqslant 2$, dann hat H entweder eine 2-dimensionale Bahn auf $\mathfrak{E}$ und ist folglich transitiv auf $\mathfrak{E}$, oder die H-Bahnen auf $\mathfrak{E}$ sind nach (a) und dem Viereckslemma alle eindimensional. Für jedes $L \in \mathfrak{E}$ ist dann die Gruppe H_L eindimensional, und nach [12, 4.6] folgt wiederum die Transitivität von H auf $\mathfrak{E}$. Nach [9, 3.5.40] ist der Ternärkörper der Ebene distributiv, und wegen [7; 11, 7.25] wäre die Ebene desarguessch, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Wäre $\dim H = 0$, dann sei $S\Delta$ die Untergruppe von Δ, die aus den Matrizen der Determinante 1 besteht und $M = (S\Delta)^1$ die Zusammenhangskomponente des Einselementes. Für die 3-dimensionale zusammenhängende Gruppe M gilt $M/M_{[S]} \tilde{\equiv} SL_2(R)$ auf S. Die Gruppe M ist lokal isomorph zur Gruppe $SL_2(R)$ und wirkt nach [6, 35.4] vollständig reduzibel auf dem R^4. Es folgt, daß M noch einen zu S komplementären Teilraum W festhält, der aber nicht notwendig zum Büschel $\mathfrak{B}$ gehört. Die durch die eindimensionalen Teilräume von W bestimmten Geraden bilden eine Geradenbahn einer Dimension $\leqslant 1$ in $\mathfrak{E}$ im Widerspruch zur Transitivität von Δ auf E.

(c) Die Gruppe Δ hält genau einen eindimensionalen Teilraum T von S fest, und es gilt $\Delta = A \times \Delta_{[T]}$, wobei mit A die Gruppe der positiven Streckungen des R^4 bezeichnet ist.

Beweis. Die effektive Wirkung von Δ auf S ist nach (b) 3-dimensional, und wegen $A \subset \Delta$ ist die effektive Wirkung von Δ auf der Kreislinie der eindimensionalen Teilräume von S 2-dimensional. Δ hält daher genau einen eindimensionalen Teilraum T von S fest. Die zusammenhängende Gruppe Δ kann den Teilraum T nicht um 0 klappen, daher enthält Δ keine negativen Streckungen des R^4. Die Gruppen A und $\Delta_{[T]}$ sind Normalteiler von Δ mit $A \cap \Delta_{[T]} = 1$ und $A\Delta_{[T]} = \Delta$, daher die Produktzerlegung.

(d) Es gibt eine zu R^2 isomorphe Untergruppe B von $\Delta_{[T]}$, welche $H = \Delta_{[S]}$ enhält.

Beweis. $\Delta_{[T]}$ ist eine 3-dimensionale Lie-Gruppe mit dem eindimensionalen Normalteiler H. Die Gruppe H werde von dem Element h der Lie Algebra von $\Delta_{[T]}$ erzeugt. Wir suchen ein Element k dieser Lie Algebra mit $[h, k] = 0$. Seien e und f zwei Elemente der Lie Algebra, die mit h den 3-dimensionalen Vektorraum aufspannen. Da H Normalteiler von $\Delta_{[T]}$ ist, gilt $[h, e] = \alpha h$, $[h, f] = \beta h$, wobei wir durch Normierung annehmen können, daß $\alpha = \beta = 1$ gilt. Wir setzen $k = e - f$ und erhalten $[h, k] = 0$. Die vom Teilraum $\langle h, k \rangle$ erzeugte Untergruppe nehmen wir als Gruppe B.

(e) Die Gruppe $G = A \times B$ erfüllt die im Satz genannten Bedingungen.

Die Gruppe G enthält die Gruppe $A \times 1$ der positiven Streckungen. Wegen $\Delta_{[S]} \subset 1 \times B \subset G$ ist $\Delta_{[S]} \subset G_{[S]}$. Umgekehrt folgt aus $G \subset \Delta$, daß $G_{[S]} \subset \Delta_{[S]}$. Es ist also $\Delta_{[S]} = G_{[S]}$, und wegen (b) ist $G_{[S]}$ eindimensional. Die

Gruppe G hat auf $\mathfrak{E}$ keine eindimensionale Bahn, sonst hielte wegen der Kommutativität von G die Standgruppe von G auf einem Element dieser Bahn jedes Element der Bahn fest, und nach [3, Lemma 6] wäre die Ebene desarguessch. Angenommen, die Gruppe G hätte auf $\mathfrak{E}$ eine nulldimensionale Bahn, das heißt wegen des Zusammenhangs von G, G hielte eine Gerade $W \in \mathfrak{E}$ fest. Dann bliebe wegen (a) auch die eindimensionale H-Bahn von W unter G global fest. Für eine Gerade $V \in W^H$, $V \neq W$, wäre G_V eine 2-dimensionale Gruppe, welche die drei Geraden $V, W, S \in \mathfrak{B}$ festhält im Widerspruch zu [3, Lemma 6]. Somit hat G auf $\mathfrak{E}$ nur 2-dimensionale Bahnen, das heißt, G ist transitiv auf $\mathfrak{E}$.

SATZ 2. *Sei $\mathbf{P}=(P,\mathfrak{L})$ eine nicht desarguessche 4-dimensionale Translationsebene, für die $\Delta=(\Gamma_0)^1$ eine Untergruppe $G \cong R^3$ folgender Art enthält: In G liegen die positiven Streckungen des R^4, G hält eine Gerade S des Büschels $\mathfrak{B}$ der Geraden durch 0 fest und wirkt transitiv auf $\mathfrak{B}-\{S\}$, und schließlich sei der Kern $G_{[S]}$ eindimensional. Unter diesen Voraussetzungen wird die Ebene von folgender Partition des R^4 erzeugt:*

$$\mathfrak{B}_{f,g} = \left\{\begin{pmatrix} t-s^2/2 & s \\ -s^3/3-gs^2/2+fs & t+s^2/2+gs \end{pmatrix}; \quad s,t\in R\right\} \cup \{S\}$$

wobei f, g reelle Parameter mit $g^2+4f \leqslant 0$ sind. Umgekehrt existiert zu je zwei solchen Parameterwerten f und g eine Ebene $\mathbf{P}_{f,g}$.

(a) *Die Kollineationsgruppe Γ ist 7-dimensional genau wenn $(f,g)\neq(0,0)$ gilt. In diesem Fall sind zwei Ebenen $\mathbf{P}_{f,g}$ und $\mathbf{P}_{f',g'}$ genau dann isomorph, wenn eine reelle Zahl $d\neq 0$ existiert mit $f'=d^2f$ und $g'=dg$. Es gilt $G=\Delta$, und G wird von folgenden drei Einparametergruppen erzeugt:*

$$A = \left\{\begin{pmatrix} r & & & \\ & r & & \\ & & r & \\ & & & r \end{pmatrix}; \quad r>0\right\}$$

$$G_{[S]} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ t & & 1 & \\ & t & & 1 \end{pmatrix}; \quad t\in R\right\} \quad \text{und}$$

$$K = \left\{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ s & 1 & & \\ s^2/2 & s & 1 & \\ s^3/6+gs^2/2+fs & s^2/2+gs & s & 1 \end{pmatrix}; \quad s\in R\right\}$$

Für $g \neq 0$ gilt $\Gamma_0/\Delta \cong Z_2$, für $g=0$ ist $\Gamma_0/\Delta \cong Z_2 \times Z_2$.

(b) *Die Kollineationsgruppe Γ ist 8-dimensional genau für $(f, g)=(0, 0)$. In diesem Fall reduziert sich die Partition auf*

$$\mathfrak{B} = \left\{\begin{pmatrix} t - s^2/2 & s \\ -s^3/3 & t + s^2/2 \end{pmatrix}; \quad s, t \in R\right\} \cup \{S\}.$$

Die Gruppe Δ wird von den Gruppen A, $G_{[S]}$, K und der einparametrigen Gruppe

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & d & & \\ & & d^2 & \\ & & & d^3 \end{pmatrix}; \quad d > o\right\}$$

erzeugt, und es gilt $\Gamma_0/\Delta \cong Z_2 \times Z_2$.

Beweis. Wir geben uns im R^4 ein (x, y, u, v)-Koordinatensystem so vor, daß die ausgezeichnete Gerade S durch $x=y=0$ gegeben wird und der Teilraum $W=\{(x, y, u, v);\ u=v=0\}$ eine Gerade des Büschels $\mathfrak{B}$ ist. Da G isomorph zur Gruppe R^3 ist, hält G einen eindimensionalen Teilraum T von S fest und ebenso einen eindimensionalen Teilraum von R^4/S. Wir können daher das Koordinatensystem so legen, daß die Matrizen aus G oberhalb der Hauptdiagonale nur Nullen haben. Der Normalteiler $G_{[S]}$ ist axial zur Achse S, hat also ein generelles Zentrum z. Nach dem Viereckslemma liegt z auf der uneigentlichen Geraden. Angenommen $z \notin S$, dann hielte wegen $G_{[S]} \lhd G$ die Gruppe G den Punkt z fest, ein Widerspruch. Damit hält $G_{[S]}$ jede Parallele von S fest und wird von einem Vektorfeld X der Form

$$X = \alpha_1 x \frac{\partial}{\partial u} + \beta_1 y \frac{\partial}{\partial u} + f_1 x \frac{\partial}{\partial v} + g_1 y \frac{\partial}{\partial v}$$

erzeugt:

$$G_{[S]} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ \alpha_1 t & \beta_1 t & 1 & \\ f_1 t & g_1 t & & 1 \end{pmatrix}; \quad t \in R\right\}.$$

Die Gruppe G läßt sich schreiben als $G=A \times B$, wobei A die Gruppe der positiven Streckungen des R^4 ist und die Gruppe $B \cong R^2$ trivial auf dem ausgezeichneten Teilraum T von S operiert. Es gilt $G_{[S]} \subset B$, und ein Komplement K von $G_{[S]}$ in B wird erzeugt von einem Vektorfeld Y der Form

$$Y = a_2 x \frac{\partial}{\partial x} + c_2 x \frac{\partial}{\partial y} + d_2 y \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_2 x \frac{\partial}{\partial u} + \beta_2 y \frac{\partial}{\partial u} + \\ + f_2 x \frac{\partial}{\partial v} + g_2 y \frac{\partial}{\partial v} + m_2 u \frac{\partial}{\partial u} + r_2 u \frac{\partial}{\partial v}.$$

Für den Kommutator $[X, Y]$ von X und Y gilt $[X, Y]=0$, und dies liefert folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \alpha_1 m_2 - a_2\alpha_1 - c_2\beta_1 &= 0 \\ \alpha_1 r_2 - a_2 f_1 - c_2 g_1 &= 0 \\ \beta_1(m_2 - d_2) &= 0 \\ \beta_1 r_2 - d_2 g_1 &= 0. \end{aligned}$$

In der $G_{[S]}$-Bahn von W müssen je zwei Geraden (genauer: die ihnen entsprechenden 2-dimensionalen Teilräume) komplementär liegen, sonst ergäbe sich keine Partition. Ein Element aus $G_{[S]}$, angewandt auf W, ergibt den Teilraum

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 t & \beta_1 t \\ f_1 t & g_1 t \end{pmatrix}.$$

Die Komplementarität liefert

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} \alpha_1(t-t') & \beta_1(t-t') \\ f_1(t-t') & g_1(t-t') \end{pmatrix} = (\alpha_1 g_1 - \beta_1 f_1)(t-t')^2 \neq 0$$

für $t \neq t'$, und daraus folgt $\alpha_1 g_1 - \beta_1 f_1 \neq 0$.

Fall $\beta_1 \neq 0$

Dann können wir wegen $\alpha_1 g_1 - \beta_1 f_1 \neq 0$
durch Konjugation erreichen, daß

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ f_1 & g_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Obiges Gleichungssystem reduziert sich dann auf $c_2=0$, $a_2=0$, $m_2-d_2=0$, $r_2=0$. Wegen $\beta_1\neq 0$ können wir durch Addition eines geeigneten Vielfachen von X zu Y erreichen, daß $\beta_2=0$ wird. Wenn wir noch den Index 2 bei den Koeffizienten weglassen, erhalten wir das Vektorfeld

$$Y = dy\frac{\partial}{\partial y} + \alpha x\frac{\partial}{\partial u} + fx\frac{\partial}{\partial v} + gy\frac{\partial}{\partial v} + du\frac{\partial}{\partial u}.$$

Sei zunächst $d\neq 0$, dann liefert Integration von Y die Gruppe

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & e^{ds} & & \\ \frac{\alpha}{d}(e^{ds}-1) & 0 & e^{ds} & \\ fs & \frac{g}{d}(e^{ds}-1) & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad s \in R \right\}.$$

Anwendung von $B=G_{[S]}\times K$ auf die Gerade W liefert das System 2-dimensionaler Teilräume

$$\left\{\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{d}(e^{ds}-1) & t \\ fs+t & \frac{g}{d}(1-e^{-ds}) \end{pmatrix}; \qquad s, t\in R\right\}.$$

In der ersten Zeile werden nicht alle Paare reeller Zahlen angenommen, und daher liefert dieses System keine Partition des R^4. Jetzt sei $d=0$, dann liefert Anwendung von $B=G_{[S]}\times K$ auf W das System 2-dimensionaler Teilräume

$$\left\{\begin{pmatrix} \alpha s & t \\ fs+t & gs \end{pmatrix}; \qquad s, t\in R\right\}.$$

Für geeignete α, f, g ist dies (zusammen mit S) eine Partition, aber der zugehörige transversale Homöomorphismus τ ist linear und die Ebene desarguessch. Für $\beta_1\neq 0$ erhalten wir also keine nicht desarguesschen Ebenen.

Fall $\beta_1=0$.

Durch Konjugation können wir annehmen, daß

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ f_1 & g_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist, und obiges Gleichungssystem $[X, Y]=0$ liefert $m_2=a_2$, $r_2=c_2$, $d_2=0$. Wegen $\alpha_1\neq 0$ können wir durch Addition eines geeigneten Vielfachen von X zu Y annehmen, daß $\alpha_2=0$ ist. Wenn wir den Index 2 wieder weglassen, erhalten wir das Vektorfeld

$$Y = ax\frac{\partial}{\partial x} + cx\frac{\partial}{\partial y} + \beta y\frac{\partial}{\partial u} + fx\frac{\partial}{\partial v} + gy\frac{\partial}{\partial v} + au\frac{\partial}{\partial u} + cu\frac{\partial}{\partial v}.$$

Nehmen wir zunächst $a\neq 0$ an, dann liefert Integration des Vektorfeldes Y die Gruppe

$$K=\left\{\begin{pmatrix} e^{as} & & & \\ \cdots & 1 & & \\ \cdots & \frac{\beta}{a}(e^{as}-1) & e^{as} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}; \qquad s\in R\right\},$$

wobei wir die mit '...' angedeuteten Elemente der Matrix im folgenden nicht explizit benötigen. Anwendung von K auf den zweidimensionalen

Teilraum W ergibt

$$\left[\begin{pmatrix} \cdots & \frac{\beta}{a}(e^{as}-1) \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{as} & \\ \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \cdots & \\ \cdots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cdots & \frac{\beta}{a}(e^{as}-1) \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Hierauf wenden wir die Gruppe

$$G_{[S]} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ t & & 1 & \\ & t & & 1 \end{pmatrix}; \quad t \in R \right\}$$

an und erhalten das System 2-dimensionaler Teilräume

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cdots + t & \frac{\beta}{a}(e^{as}-1) \\ \cdots & \cdots + t \end{pmatrix}; \quad s, t \in R \right\}.$$

Rechts oben werden nicht alle reellen Zahlen angenommen, und daher liefert dieses System keine Partition des R^4.

Es folgt $a=0$, und Integration des Vektorfeldes ergibt die Gruppe

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ cs & 1 & & \\ \beta cs^2/2 & \beta s & 1 & \\ c^2\beta s^3/6 + gcs^2/2 + fs & cs^2/2 + gs & cs & 1 \end{pmatrix}; \quad s \in R \right\}.$$

Wäre $c=0$, dann würde sich durch Anwendung von $G_{[S]} \times K$ auf W höchstens eine desarguessche Partition ergeben. Es ist also $c \neq 0$, und durch Übergang vom Vektorfeld Y zum Vektorfeld Y/c können wir $c=1$ annehmen. Für $\beta=0$ erhält man keine Partition, also ist $\beta \neq 0$. Durch Konjugation mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \beta & \\ & & & \beta \end{pmatrix}$$

geht die Gruppe $G_{[S]}$ in sich über und der Parameter β wird 1. Damit erhalten wir die Gruppe

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ s & 1 & & \\ s^2/2 & s & 1 & \\ s^3/6 + gs^2/2 + fs & s^2/2 + gs & s & 1 \end{pmatrix}; \quad s \in R \right\}$$

mit den beiden reellen Parametern f und g.

Um aus der Gruppe die Partition zu konstruieren, müssen wir wegen der Transitivität von $G_{[S]} \times K$ auf $\mathfrak{B} - \{S\}$ die Gruppe $G_{[S]} \times K$ auf

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wirken lassen. Anwendung von K auf W gibt

$$\left[\begin{pmatrix} s^2/2 & s \\ s^3/3 + gs^2/2 + fs & s^2/2 + gs \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \\ s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} 1 & \\ -s & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -s^2/2 & s \\ -s^3/3 - gs^2/2 + fs & s^2/2 + gs \end{pmatrix},$$

und hierauf $G_{[S]}$ angewandt, liefert das Büschel

$$B_{f,g} = \{S\} \cup \left\{\begin{pmatrix} -s^2/2 + t & s \\ -s^3/3 - gs^2/2 + fs & s^2/2 + gs + t \end{pmatrix}; s, t \in R\right\}.$$

Sei $\tau = ((-s^2/2 + t, s) \mapsto (-s^3/3 - gs^2/2 + fs, \ s^2/2 + gs + t)): R^2 \to R^2$ die durch $\mathfrak{B}_{f,g}$ gegebene Abbildung der (α, β)-Ebene, dann betrachten wir zunächst die Beschränkung von τ auf die Geraden durch 0. Die α-Achse wird durch $s=0$ beschrieben und geht über in die β-Achse. Die Gerade $\alpha = k\beta$, $k \in R$, durch $0 \in R^2$ wird gegeben durch $t = ks + s^2/2$. Sei (s, t) ein Punkt auf ihr, dann schneidet die Parallele durch den Bildpunkt $(s, t)^\tau$ die α-Achse im Wert

$$x = fs - gs^2/2 - s^3/3 - k(gs + s^2/2 + t) =$$
$$= -s^3/3 - (2k + g)s^2/2 + (f - kg - k^2)s.$$

Dies ist eine kubische Funktion in s, und x läuft von $+\infty$ bis $-\infty$ wenn s von $-\infty$ bis $+\infty$ variiert. Es gilt

$$\mathrm{d}x/\mathrm{d}s = -s^2 - (2k + g)s + (f - kg - k^2).$$

und x ist monoton in s genau, wenn die Diskriminante der quadratischen Gleichung in s kleiner oder gleich Null ist:

$$D = g^2 + 4f \leqslant 0.$$

Da die β-Achse topologisch abgebildet wird, folgt unter Anwendung von $G_{[S]}$, daß τ ein transversaler Homöomorphismus der (α, β)-Ebene ist. Damit ist gezeigt, daß $\mathfrak{B}_{f,g}$ genau dann eine 4-dimensionale Translationsebene definiert, wenn $g^2 + 4f \leqslant 0$ ist. Da die Abbildung τ nicht linear ist, sind die so definierten Ebenen $\mathbf{P}_{f,g}$ nicht desarguessch.

Die volle Standgruppe Γ_0 einer Ebene $\mathbf{P}_{f,g}$ hält die Gerade S fest, sonst wäre Γ_0 transitiv auf der Translationsachse und die Ebene nach [3, Satz 3] desarguessch. Angenommen, die Gruppe $\Delta = (\Gamma_0)^1$ hielte den ausgezeichneten

Teilraum T von S nicht fest, dann wäre Δ transitiv auf dem Raum der eindimensionalen Teilräume von S. Andererseits wäre die effektive Wirkung von Δ auf diesem Raum 2-dimensional, ein Widerspruch. Es gilt also $T^{\Delta}=T$. Für $\gamma\in\Gamma_0$ folgt dann wegen $\Delta\lhd\Gamma_0$, daß $\Delta=\gamma^{-1}\Delta\gamma$ den Teilraum T^{γ} festhält. Da Δ genau den eindimensionalen Teilraum T von S fixiert, folgt $T^{\gamma}=T$, und Γ_0 hält T fest. Entsprechend hält Γ_0 den ausgezeichneten eindimensionalen Teilraum von R^4/S fest. Die Gruppe Δ ist höchstens 4-dimensional, sonst wäre die Ebene nach [3, Satz 4] desarguessch. Wenn Δ 4-dimensional ist, dann folgt nach Satz 1 (b), daß $\Delta_{[S]}$ eindimensional ist und mit $G_{[S]}$ übereinstimmt. Für $\dim\Delta=3$ gilt $G=\Delta$, und es ist ebenfalls $\Delta_{[S]}=G_{[S]}$.

Jetzt sei $\varphi:R^4\to R^4$ eine lineare Abbildung, welche die Partition $\mathfrak{B}_{f,g}$ in die Partition $\mathfrak{B}_{f',g'}$ überführt. Dann bildet φ den Teilraum S und die ausgezeichneten Teilräume von S und R^4/S jeweils auf sich ab, hat also oberhalb der Hauptdiagonale Nullen. Wegen der Transitivität von Δ' auf $\mathfrak{C}'$ können wir außerdem annehmen, daß $W^{\varphi}=W$ ist, und damit hat φ die Form

$$\begin{pmatrix} a & & & \\ c & d & & \\ & & m & \\ & & r & n \end{pmatrix}.$$

Konjugation mit φ liefert einen Isomorphismus von Δ auf Δ', bei dem $G_{[S]}=\Delta_{[S]}$ in $G_{[S]}=\Delta_{[S]}$ übergeht. Es gilt folglich $\varphi^{-1}G_{[S]}\varphi=G_{[S]}$, und dies liefert

$$\begin{pmatrix} m & \\ r & n \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} a & \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Da Δ transitiv auf den von T verschiedenen eindimensionalen Teilräumen von S wirkt, kann man $c=0$ annehmen, also auch $r=0$. Schließlich können wir durch eventuelles Hintenanfügen einer Streckung voraussetzen, daß $a=1$ ist. Die lineare Abbildung φ hat also die Gestalt

$$\varphi=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & d & & \\ & & k & \\ & & & kd \end{pmatrix}.$$

Anwendung von φ auf die Teilräume der Partition $\mathfrak{B}_{f,g}$ gibt:

$$\begin{pmatrix} k & \\ & kd \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -s^2/2+t & s \\ -s^3/3-gs^2/2+fs & s^2/2+gs+t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1/d \end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix} (-s^2/2+t)\,k & sk/d \\ (-s^3/3-gs^2/2+fs)\,kd & (s^2/2+gs+t)\,k \end{pmatrix}.$$

Wir substituieren $\sigma = sk/d$, $\tau = tk$ und erhalten

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sigma^2}{2}\frac{d^2}{k}+\tau & \sigma \\ -\frac{\sigma^3}{3}\frac{d^4}{k^2}-\frac{\sigma^2}{2}\frac{g}{k}d^3+f\sigma d^2 & \frac{\sigma^2 d^2}{2k}+g\sigma d+\tau \end{pmatrix}.$$

Da unter φ die $G_{[S]}$-Bahn von W des Büschels $\mathfrak{B}$ in die $G_{[S]}$-Bahn von W des Büschels $\mathfrak{B}'$ übergeht, folgt aus der ersten Zeile der letzten Matrix, daß $k = d^2$ gilt, und wir bekommen

$$\left\{\begin{pmatrix} -\sigma^2/2+\tau & \sigma \\ -\sigma^3/3-gd\sigma^2/2-fd^2\sigma & \sigma^2/2+gd\sigma+\tau \end{pmatrix}; \quad \sigma, \tau \in R\right\},$$

das heißt, $f' = fd^2$, $g' = gd$ mit $d \neq 0$. Damit ist gezeigt, daß zwei Partitionen $\mathfrak{B}_{f,g}$ und $\mathfrak{B}_{f',g'}$ genau dann isomorphe Ebenen erzeugen, wenn eine reelle Zahl $d \neq 0$ existiert mit $f' = fd^2$ und $g' = gd$.

(a) Sei zunächst $(f, g) \neq (0, 0)$, dann folgt aus $g^2 + 4f \leqslant 0$, daß $f < 0$ gilt, und durch Wahl von $d^2 = -1/f$ können wir $f = -1$ erreichen. Dann wird der Isomorphietyp der Ebene durch einen Parameter g, $0 \leqslant g \leqslant 2$, gegeben. Zur Bestimmung der vollen Kollineationsgruppe Γ sei φ eine nicht in G gelegene Diagonalmatrix. Dann ist φ entweder eine negative Streckung oder hat nach obigem die Form

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & d & & \\ & & d^2 & \\ & & & d^3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad d \neq 0.$$

Wenn $g \neq 0$ ist, dann folgt aus $g' = g = gd$, daß $d = 1$ ist, und wir haben $\Gamma_0/\Delta \cong Z_2$, wobei die Nebenklasse durch

$$\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben wird. Für $g = 0$ ist nach Annahme $f \neq 0$, und die Gleichung $f' = f = fd^2$ liefert $d^2 = 1$. Daher ergibt sich $\Gamma_0/\Delta \cong Z_2 \times Z_2$, und die beiden Gruppen Z_2 werden von

$$\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \text{bzw.} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \text{erzeugt.}$$

Insbesondere gilt im Fall $(f, g) \neq (0, 0)$ die Gleichung $G = \Delta$, und die volle Kollineationsgruppe ist 7-dimensional.

(b) Nun sei $(f, g) = (0, 0)$, dann wird $\Delta = (\Gamma_0)^1$ erzeugt von G und der einparametrigen Gruppe

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & d & & \\ & & d^2 & \\ & & & d^3 \end{pmatrix}; \quad d > 0 \right\}.$$

Insbesondere ist Δ 4-dimensional, die Gruppe Γ folglich 8-dimensional. Es gilt $\Gamma_0/\Delta \cong Z_2 \times Z_2$, wobei die Gruppen Z_2 wie unter (a) erzeugt werden.

SATZ 3. *Sei* $\mathbf{P} = (P, \mathfrak{L})$ *eine nicht desarguessche* 4-*dimensionale Translationsebene mit* 8-*dimensionaler Kollineationsgruppe* Γ. *Für einen eigentlichen Punkt* $0 \in R^4$ *möge* $\Delta = (\Gamma_0)^1$ *eine Gerade S des Büschels* $\mathfrak{B}$ *der Geraden durch* 0 *festhalten. Dann wird die Ebene von folgender Partition erzeugt:*

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} t & s \\ -s^3/3 & s^2 + t \end{pmatrix}; \quad s, t \in R \right\} \cup \{S\}.$$

Beweis. Nach Satz 1 enthält Δ eine Untergruppe $G \cong R^3$, welche die Voraussetzungen des Satzes 2 erfüllt. Die Ebene wird also von einer Partition $\mathfrak{B}_{f,g}$ des Satzes 2 erzeugt, und wegen $\dim \Gamma = 8$ folgt $f = g = 0$. Wir erhalten also die Partition

$$\left\{ \begin{pmatrix} -s^2/2 + \tau & s \\ -s^3/3 & s^2/2 + \tau \end{pmatrix}; \quad s, \tau \in R \right\} \cup \{S\},$$

und Substitution von $t = -s^2/2 + \tau$ ergibt obige Form.

Bemerkung. Die Ebene des Satzes 3 existiert auch für andere Körper: Sei K ein endlicher Körper von Charakteristik $\neq 3$, welcher keine dritte Einheitswurzel besitzt. Dann ist

$$B_K = \left\{ \begin{pmatrix} t & s \\ -s^3/3 & s^2 + t \end{pmatrix}; \quad s, t \in K \right\} \cup \{S\}$$

eine Partition des K^4 in 2-dimensionale Teilräume, welche eine Translationsebene der Ordnung $|K|^2$ erzeugt.

Zum Nachweis der Existenz genügt es, wie in Satz 2 zu zeigen, daß die Abbildung $s \mapsto x = -s^3/3 - ks^2 - k^2 s$ für jedes feste $k \in K$ den Körper K eineindeutig auf sich abbildet. Es gilt $x = -((k+s)^3 - k^3)/3$. Da der Körper keine dritte Einheitswurzel besitzt, ist die Abbildung $s \mapsto s^3$: $K \to K$ injektiv, und da K endlich ist, auch surjektiv. Daraus folgt, daß für festes $k \in K$ auch die Abbildung $s \mapsto (k+s)^3 - k^3$: $K \mapsto K$ bijektiv ist. Da der Körper nach

Voraussetzung nicht die Charakteristik 3 hat, bleibt die Bijektivität bei anschließender Multiplikation mit $-\frac{1}{3}$. Wenn wir noch voraussetzen, daß die Charakteristik des Körpers von 2 verschieden ist, können wir die Gruppen $G_{[S]}$ und K wie in Satz 2 hinschreiben und erhalten: Die Ebene besitzt eine Kollineationsgruppe, die einen Punkt der Translationsachse festhält und auf dem Rest der Translationsachse transitiv operiert.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. André, 'Über nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe', *Math. Zeitschr.* **60** (1954), 156–186.
[2] D. Betten, 'Nicht-desarguessche 4-dimensionale Ebenen', *Archiv d. Math.* **21** (1970), 100–102.
[3] D. Betten, '4-dimensionale Translationsebenen', *Math. Zeitschr.* **128** (1972), 129–151.
[4] L. E. J. Brouwer, 'Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen, unabhängig von den Axiomen von Lie', *Math. Annalen* **67** (1909), 246–267.
[5] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston 1966.
[6] H. Freudenthal und H. de Vries, *Linear Lie Groups*, Academic Press, New York, London 1969.
[7] K. H. Hofmann, 'Topologische distributive Doppelloops', *Math. Zeitschr.* **71** (1959), 36–68.
[8] D. Montgomery und L. Zippin, *Topological Transformation Groups*, Interscience Publ., New York 1955.
[9] G. Pickert, *Projektive Ebenen*, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955.
[10] P. Plaumann und K. Strambach, 'Zweidimensionale Quasikörper mit Zentrum', *Archiv d. Math.* **21** (1970), 455–465.
[11] H. Salzmann, 'Topological Planes', *Advances in Math.* **2** (1967), 1–60.
[12] H. Salzmann, 'Kollineationsgruppen kompakter vier-dimensionaler Ebenen', *Math. Zeitschr.* **117** (1970), 112–124.
[13] H. Salzmann, 'Kollineationsgruppen kompakter vier-dimensionaler Ebenen II', *Math. Zeitschr.* **121** (1971), 104–110.
[14] J. P. Serre, *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, Benjamin, New York-Amsterdam 1966.
[15] L. A. Skornjakov, 'Topologische projektive Ebenen', *Trudy Moskov. Mat. Obsc.* **3** (1954), 347–373.
[16] J. Tits, *Tabellen zu den einfachen Lie Gruppen und ihren Darstellungen, Lecture Notes in Math.* **40**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1967.
[17] J. Tits, *Liesche Gruppen und Algebren*, Vorlesung Bonn 1963/64.

Anschrift des Verfassers:
Dieter Betten,
Mathematisches Institut der Universität,
D 7400 Tübingen,
Hölderlinstrasse 19,
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 3.1.1973)